Números complejos

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

El conjunto formado por todos los números de la forma $a + ib$, donde a y b son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

El conjunto formado por todos los números de la forma $a + ib$, donde a y b son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(a+ib)+(c+id) &= a+c+i(b+d)\\ (a+ib)(c+id) &= ac-bd+i(ad+bc)\end{aligned}$$

El conjunto formado por todos los números de la forma $a+ib$, donde a y b son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$
\begin{aligned}
(a+ib)+(c+id) &= a+c+i(b+d) \\
(a+ib)(c+id) &= ac-bd+i(ad+bc)
\end{aligned}
$$

se llama cuerpo de los números complejos y se representa por $\mathbb{C}$.

Números complejos

El conjunto formado por todos los números de la forma $a+ib$, donde a y b son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(a+ib)+(c+id) &= a+c+i(b+d)\\ (a+ib)(c+id) &= ac-bd+i(ad+bc)\end{aligned}$$

se llama cuerpo de los números complejos y se representa por $\mathbb{C}$.Se dice que a es la *parte real* y b la *parte imaginaria* del número complejo $a+ib$.

Números complejos

El conjunto formado por todos los números de la forma $a + ib$, donde a y b son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= a + c + i(b + d)\\ (a + ib)(c + id) &= ac - bd + i(ad + bc)\end{aligned}$$

se llama cuerpo de los números complejos y se representa por $\mathbb{C}$.Se dice que a es la *parte real* y b la *parte imaginaria* del número complejo $a + ib$.Dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria. Los números complejos con parte imaginaria cero, $a = a + i0$, son números reales. Los números complejos con parte real cero, $ib = 0 + ib$, se llaman *imaginarios puros*.

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.El elemento neutro de la suma es 0 y la unidad del producto es 1. Además, $-a - ib$ es el opuesto de $a + ib$, y todo número $a + ib \neq 0$ tiene inverso:

$$(a + ib)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = 1.$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.El elemento neutro de la suma es 0 y la unidad del producto es 1. Además, $-a - ib$ es el opuesto de $a + ib$, y todo número $a + ib \neq 0$ tiene inverso:

$$(a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) = 1.$$

Por la definición del producto de números complejos, se tiene que:

$$i^2 = -1.$$

El número complejo i se llama *“unidad imaginaria"*.

¿Es cierto que $1 = -1$?

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$.

¿Es cierto que $1 = -1$?

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$.Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

¿Es cierto que $1=-1$?

Acabamos de ver que $i^2=-1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i=\sqrt{-1}$.Fíjate lo que ocurre si ponemos $i=\sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$\mathbf{-1=i^2=i\,i=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1}$$

¿Es cierto que $1 = -1$?

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$.Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$\mathbf{-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1}$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

¿Es cierto que $1 = -1$?

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$.Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$\mathbf{-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1}$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

¿Dónde está el error?

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero perdemos la relación de orden. No se puede definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero perdemos la relación de orden. No se puede definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden.
Así que ya sabes:

¡nunca escribas desigualdades entre números complejos!

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero perdemos la relación de orden. No se puede definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden.
Así que ya sabes:

¡nunca escribas desigualdades entre números complejos!

Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

Complejo conjugado y módulo

Se representa $z = x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

Complejo conjugado y módulo

Se representa $z = x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.
Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

$$\overline{z} = x - iy$$

Complejo conjugado y módulo

Se representa $z = x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.
Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

$$\overline{z} = x - iy$$

y el **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Representación gráfica de un número complejo

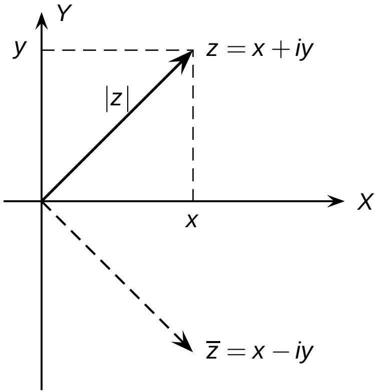


Figure. Representación de un número complejo

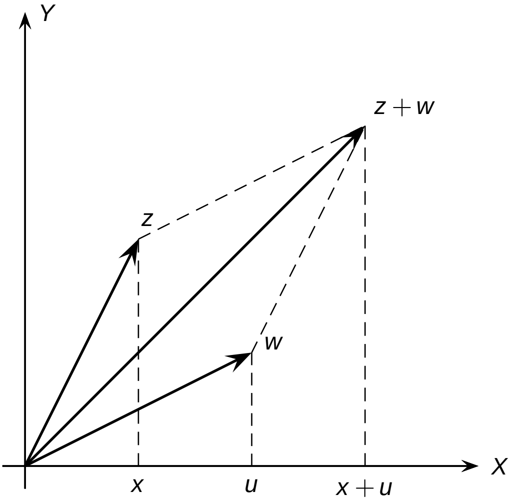


Figure. Suma de números complejos

Propiedades de la conjugación

El conjugado de una suma es la suma de los conjugados y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$$

Propiedades de la conjugación

El conjugado de una suma es la suma de los conjugados y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$$

Propiedades del módulo

Cualesquiera sean los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que:

Propiedades de la conjugación

El conjugado de una suma es la suma de los conjugados y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$$

Propiedades del módulo

Cualesquiera sean los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que:

- $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

Propiedades de la conjugación

El conjugado de una suma es la suma de los conjugados y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$$

Propiedades del módulo

Cualesquiera sean los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que:

- $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
- El módulo de un producto es igual al producto de los módulos.

$$|zw| = |z||w|$$

Propiedades de la conjugación

El conjugado de una suma es la suma de los conjugados y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$$

Propiedades del módulo

Cualesquiera sean los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que:

- $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
- El módulo de un producto es igual al producto de los módulos.

$$|zw| = |z||w|$$

- El módulo de una suma es menor o igual que la suma de los módulos.

$$|z+w| \leqslant |z| + |w| \qquad \text{(desigualdad triangular)}$$

La desigualdad triangular es una igualdad si, y solamente si uno de ellos es un múltiplo positivo del otro; equivalentemente, están en una misma semirrecta a partir del origen.

Para expresar un cociente de complejos en forma cartesiana se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{u+iv}{x+iy} = \frac{(u+iv)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{ux+vy}{x^2+y^2} + i\frac{vx-uy}{x^2+y^2}.$$

Forma polar y argumentos de un número complejo

Un número complejo $x = x + iy$ distinto de 0 puede escribirse en la forma:

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

Donde debemos elegir ϑ por las condiciones:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{|z|}, \qquad \mathrm{sen}\,\vartheta = \frac{y}{|z|}$$

Forma polar y argumentos de un número complejo

Un número complejo $x = x + iy$ distinto de 0 puede escribirse en la forma:

$$z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

Donde debemos elegir ϑ por las condiciones:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}\vartheta = \frac{y}{|z|}$$

Cualquier número $\vartheta \in \mathbb{R}$ que cumpla estas condiciones se llama **un argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de z es:

$$\operatorname{Arg}(\mathbf{z}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R} : \mathbf{z} = |\mathbf{z}|(\cos \mathbf{t} + \mathbf{i} \operatorname{sen} \mathbf{t})\}$$

Forma polar y argumentos de un número complejo

Un número complejo $x = x + iy$ distinto de 0 puede escribirse en la forma:

$$z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

Donde debemos elegir ϑ por las condiciones:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}\vartheta = \frac{y}{|z|}$$

Cualquier número $\vartheta \in \mathbb{R}$ que cumpla estas condiciones se llama **un argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de z es:

$$\operatorname{Arg}(\mathbf{z}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R} : \mathbf{z} = |\mathbf{z}|(\cos\mathbf{t} + \mathbf{i}\operatorname{sen}\mathbf{t})\}$$

Este conjunto queda determinado cuando se conoce alguno de sus elementos, pues si $t_0 \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

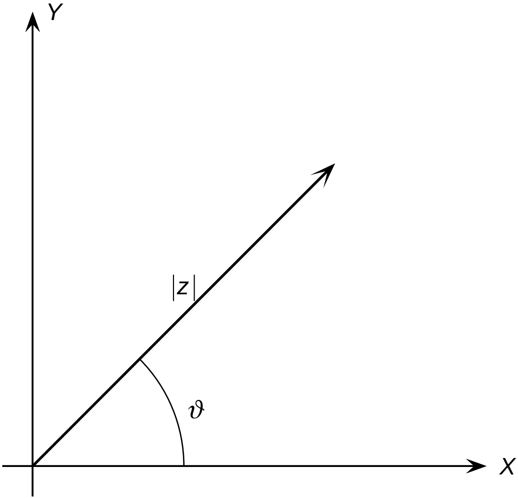


Figure. Forma polar de un número complejo

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y se le llama **argumento principal** de z.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y se le llama **argumento principal** de z.El argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) - \pi \ \text{ si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 \ \text{ si } y < 0, x = 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) \ \text{ si } x > 0 \\ \pi/2 \ \text{ si } y > 0, x = 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi \ \text{ si } y \geqslant 0, x < 0 \end{cases}$$

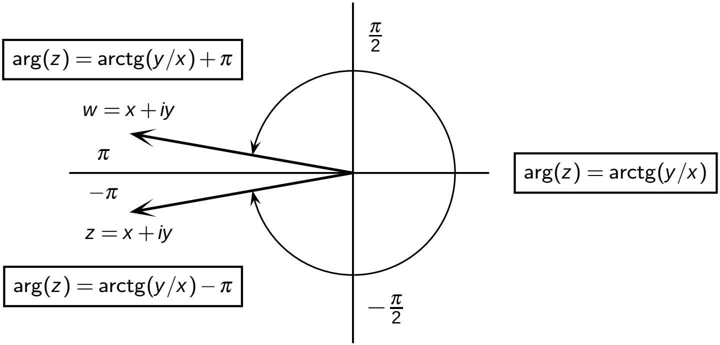


Figure. Argumento principal

La forma polar es muy útil para realizar productos de números complejos. Sean

$$z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta), \qquad w = |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|(\cos(\vartheta+\varphi) + i \operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

La forma polar es muy útil para realizar productos de números complejos. Sean

$$z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta), \qquad w = |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|(\cos(\vartheta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

La forma polar es muy útil para realizar productos de números complejos. Sean

$$z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta), \qquad w = |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|(\cos(\vartheta+\varphi) + i \operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

El producto de dos números complejos es geométricamente un giro seguido de una homotecia.

Fórmula de De Moivre

$$\vartheta \in \operatorname{Arg}(z),\ \varphi \in \operatorname{Arg}(w) \implies \vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$$

Fórmula de De Moivre

$$\vartheta \in \operatorname{Arg}(z),\ \varphi \in \operatorname{Arg}(w) \implies \vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$$

En particular: $\arg z + \arg w \in \operatorname{Arg}(zw)$. Por tanto:

$$\arg z + \arg w = \arg(zw) \iff -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi$$

Fórmula de De Moivre

$$\vartheta \in \mathrm{Arg}(z),\ \varphi \in \mathrm{Arg}(w) \implies \vartheta + \varphi \in \mathrm{Arg}(zw)$$

En particular: $\arg z + \arg w \in \mathrm{Arg}(zw)$. Por tanto:

$$\arg z + \arg w = \arg(zw) \iff -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi$$

Fórmula de De Moivre

Si $z \neq 0$, $\vartheta \in \mathrm{Arg}(z)$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que $n\vartheta \in \mathrm{Arg}(z^n)$. Es decir:

$$z^n = \big(|z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n \big(\cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta)\big)$$

Raíces de un número complejo

Dado un número natural $n \geqslant 2$, todo número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces complejas distintas que vienen dadas por:

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Raíces de un número complejo

Dado un número natural $n \geqslant 2$, todo número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces complejas distintas que vienen dadas por:

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Geométricamente, son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.
Se define la **raíz n-ésima principal** de z que se representa por $\sqrt[n]{z}$ como:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z}{n}\right)}$$

Raíces de un número complejo

Dado un número natural $n \geqslant 2$, todo número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces complejas distintas que vienen dadas por:

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Geométricamente, son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.
Se define la **raíz n-ésima principal** de z que se representa por $\sqrt[n]{z}$ como:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z}{n}\right)}$$

Observa que $\arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \dfrac{\arg z}{n}$ y, por tanto: $-\dfrac{\pi}{n} < \arg\left(\sqrt[n]{z}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{n}$.

Raíces de un número complejo

Dado un número natural $n \geqslant 2$, todo número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces complejas distintas que vienen dadas por:

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1}$$

Geométricamente, son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.
Se define la **raíz n-ésima principal** de z que se representa por $\sqrt[n]{z}$ como:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z}{n}\right)}$$

Observa que $\arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \dfrac{\arg z}{n}$ y, por tanto: $-\dfrac{\pi}{n} < \arg\left(\sqrt[n]{z}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{n}$.
La raíz n-ésima principal de z es la única de las raíces n-ésimas de z cuyo argumento principal está en el intervalo $]-\pi/n, \pi/n]$.

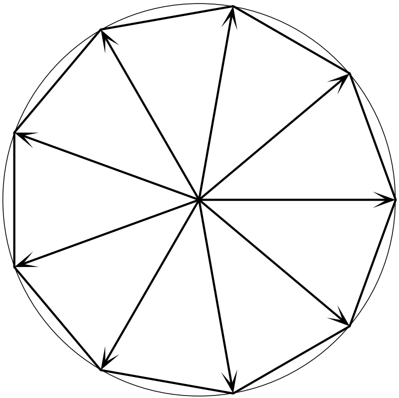


Figure. Raíces novenas de la unidad

Teorema. El número complejo i es la raíz cuadrada principal del número complejo -1.

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Teorema. El número complejo i es la raíz cuadrada principal del número complejo -1.

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Demostración. Se tiene que $\arg(-1) = \pi$. Por tanto:

$$\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2) = i$$

¿$\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$**?**

$$¿\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}?$$

En general no.

$$¿\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}?$$

En general no.

$\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$, es *una* raíz n-ésima de zw *pero no tiene por qué ser la principal*.

¿$\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$?

En general no.

$\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$, es *una* raíz n-ésima de zw *pero no tiene por qué ser la principal*.
Se verifica que:

$$\boxed{\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \iff -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi}$$

Para $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos $\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi$, y no se cumple la condición anterior.

Para $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos $\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi$, y no se cumple la condición anterior.En este caso:

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Para $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos $\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi$, y no se cumple la condición anterior.En este caso:

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

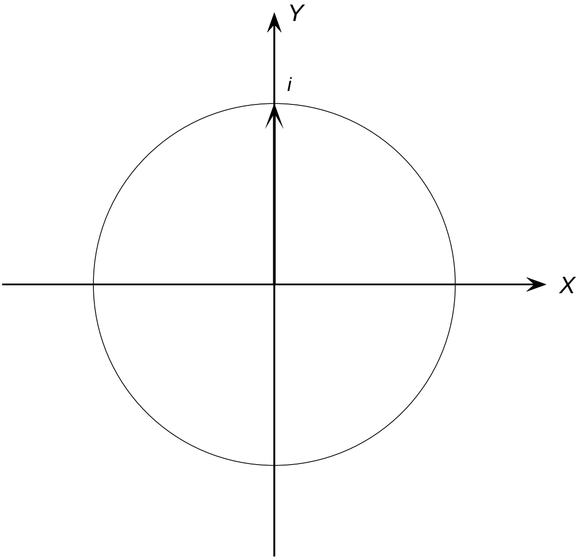
es decir $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de $1 = (-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1.

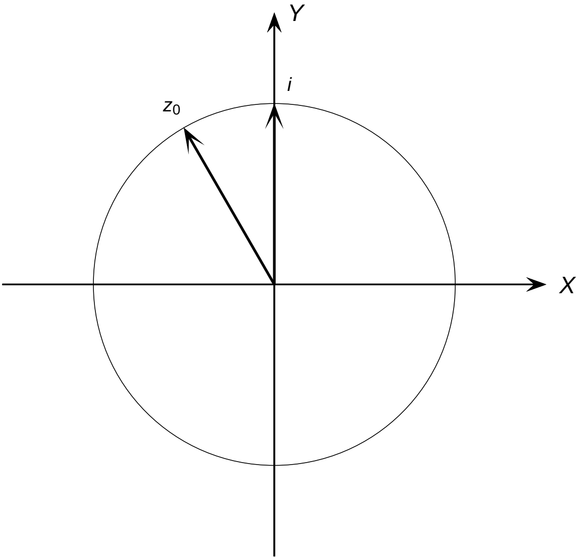
Para $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos $\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi$, y no se cumple la condición anterior.En este caso:

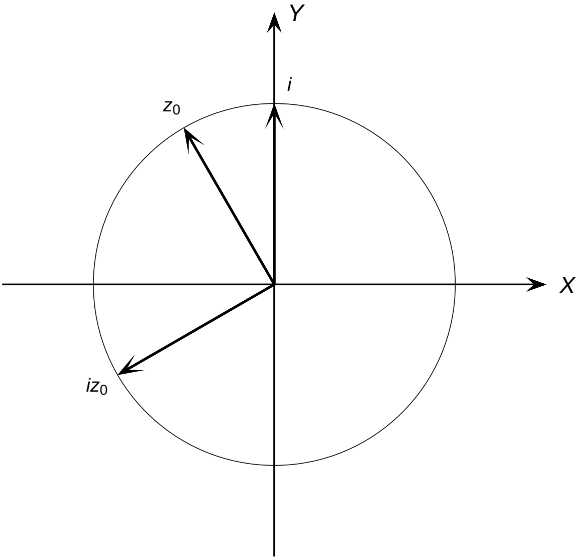
$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

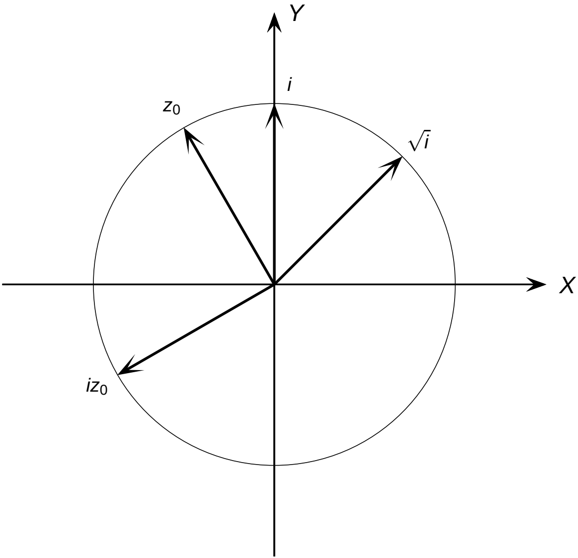
es decir $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de $1 = (-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1.Ahora ya sabes dónde está el error en lo que sigue:

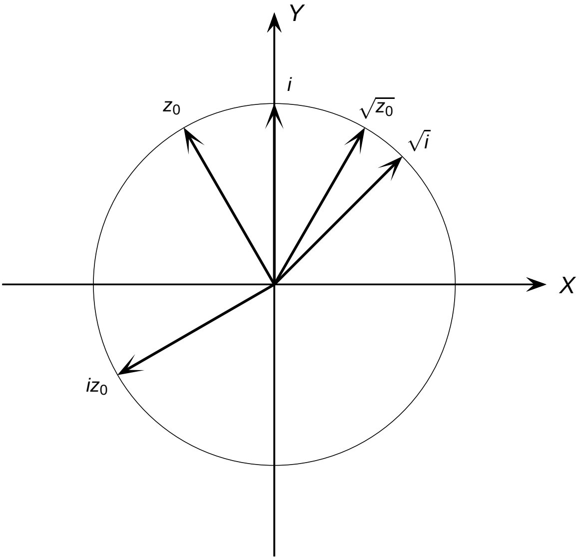
$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

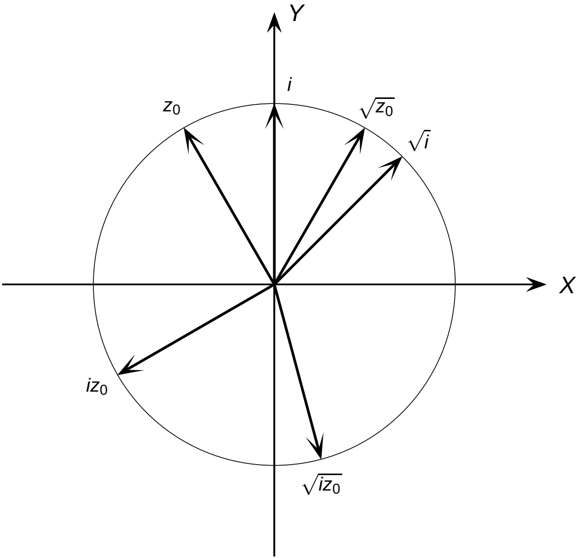

Y
i
X


Y
i
z_0
X

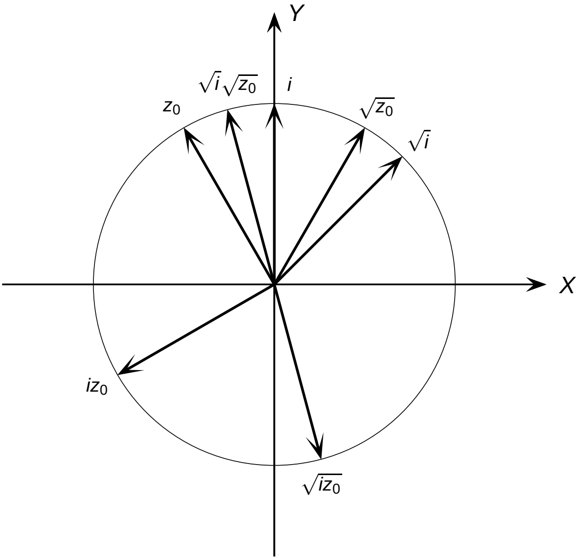

Y
i
z_0
X
iz_0


Y
i
z_0
$\sqrt{i}$
X
iz_0


Y
i
z_0
$\sqrt{z_0}$
$\sqrt{i}$
X
iz_0



Y
X
i
z_0
$\sqrt{z_0}$
$\sqrt{i}$
iz_0
$\sqrt{iz_0}$


Y
$\sqrt{i}\sqrt{z_0}$
i
z_0
$\sqrt{z_0}$
$\sqrt{i}$
X
iz_0
$\sqrt{iz_0}$

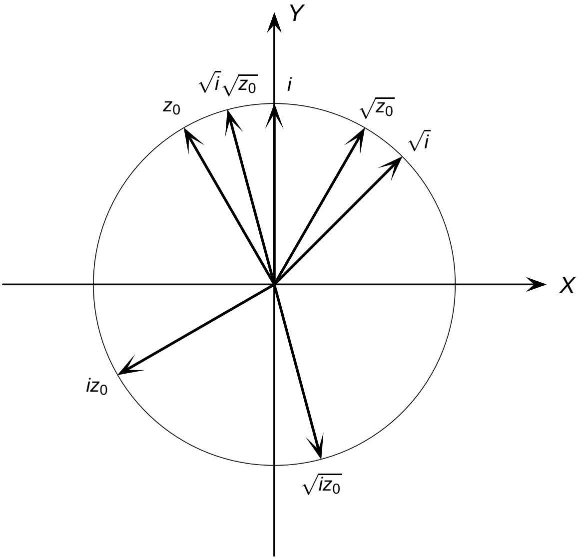


Figure. $\sqrt{iz_0} \neq \sqrt{i}\sqrt{z_0}$, $z_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

La función exponencial

$$\boxed{e^{x+iy} = \exp(x+iy) = e^x\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)}$$

Es una *extensión* de la exponencial real a todo $\mathbb{C}$.

$$\boxed{e^{x+iy} = \exp(x+iy) = e^{x}\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)}$$

Es una *extensión* de la exponencial real a todo $\mathbb{C}$.Observa que:

$$\boxed{|e^{z}| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^{z})}$$

La función exponencial

$$\boxed{e^{x+iy} = \exp(x+iy) = e^x\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)}$$

Es una *extensión* de la exponencial real a todo $\mathbb{C}$.Observa que:

$$\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad \text{(para todo } t \in \mathbb{R})}$$

La función exponencial

$$\boxed{e^{x+iy} = \exp(x+iy) = e^x\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)}$$

Es una *extensión* de la exponencial real a todo $\mathbb{C}$.Observa que:

$$\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})}$$

De la fórmula de Euler se deducen las *Ecuaciones de Euler*:

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

La función exponencial

$$\boxed{e^{x+iy} = \exp(x+iy) = e^x\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)}$$

Es una *extensión* de la exponencial real a todo $\mathbb{C}$.Observa que:

$$\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})}$$

De la fórmula de Euler se deducen las *Ecuaciones de Euler*:

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

La exponencial compleja transforma sumas en productos.

$$\boxed{e^{z+w} = e^z e^w \qquad \text{para todos } z, w \in \mathbb{C}}$$

La función exponencial

$$\boxed{e^{x+iy} = \exp(x+iy) = e^x\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)}$$

Es una *extensión* de la exponencial real a todo $\mathbb{C}$.Observa que:

$$\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})}$$

De la fórmula de Euler se deducen las *Ecuaciones de Euler*:

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

La exponencial compleja transforma sumas en productos.

$$\boxed{e^{z+w} = e^z e^w \qquad \text{para todos } z, w \in \mathbb{C}}$$

La exponencial compleja es una función *periódica* con período $2\pi i$.

$$\boxed{e^z = e^{z+2k\pi i} \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}}$$